15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et on pose $I=\displaystyle\int_{100}^{1000} f(t)dt$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$.

b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x>0$ $\quad 1-\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c. En déduire que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}\le f(x)$.

2. Déterminer un encadrement de I.

16 On considère la fonction f définie sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, pour tout x de I.

3. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

17 1. Représenter dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

a. Vérifier que $\dfrac{1}{2}\le\mathcal{A}\le 1$.

b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.

18 Soit la suite (u_n) définie par

$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\left(x^2+1\right)^2}dx,\ n\ge 1$.

1. Montrer que $0\le\dfrac{x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^2}\le x^{2n+1}$,

pour tout entier $n\ge 1$ et tout $0\le x\le 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

19 Soit la suite (u_n) définie par

$u_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$ et $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx,\ n\ge 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Comparer u_n et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx,\ n\ge 1$.

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c. Calculer u_2 et u_3.

20 Soit la suite (u_n) définie par

$u_0=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x}dx$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx\ n\ge 1$.

1. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $(3+2n)u_n=2nu_{n-1}$.

c. Calculer u_2 et u_3.

21 Soit la suite (u_n) définie par

$u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ n\ge 1$.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Qarray.tn-Aqra Blech- Qarray.tn